Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
03.-04.12.2013

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Man findet sehr viel über eine lineare Abbildung heraus, wenn man sie in der Eigenbasis betrachtet. Dann wird nämlich die Matrix, die die lineare Abbildung darstellt, diagonal.

[P18] *Diagonalisieren mit Störung*
Wir betrachten eine Reihe von 2×2 Matrizen. Zu jeder dieser symmetrischen Matrizen sollen die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die jeweils dazu gehörenden normierten Eigenvektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ in ihren Komponentendarstellungen $\underline{f}_1$ und $\underline{f}_2$ ermittelt werden. Überprüfen Sie, ob im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ auch wirklich $\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_2 = 0$ gilt. Was lernen Sie aus der Betrachtung des Grenzwertes $\epsilon \to 0$ in den letzten beiden Beispielen?

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+3\epsilon & 4\epsilon \\ 4\epsilon & 1-3\epsilon \end{pmatrix}.$$

[P19] *Drehungen*
Zeigen Sie, dass eine 3×3 Drehmatrix im Allgemeinen *nur einen* reellen Eigenwert $\lambda = +1$ hat. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie dies erst am konkreten Beispiel $\bar{D} = D_{\vec{e}_1,\varphi}$.
(b) Zeigen Sie den allgemeinen Fall, indem Sie die allgemeine Drehung D geschickt aus anderen Drehungen zusammensetzen und damit das Problem auf (a) zurückführen.
(c) Zeigen Sie den allgemeinen Fall direkt, indem Sie $\det(D - \lambda\mathbb{1})$ als ein Polynom in λ schreiben, dessen Koeffizienten allein durch $\det(D)$ und $\mathrm{sp}(D)$ ausgedrückt sind.